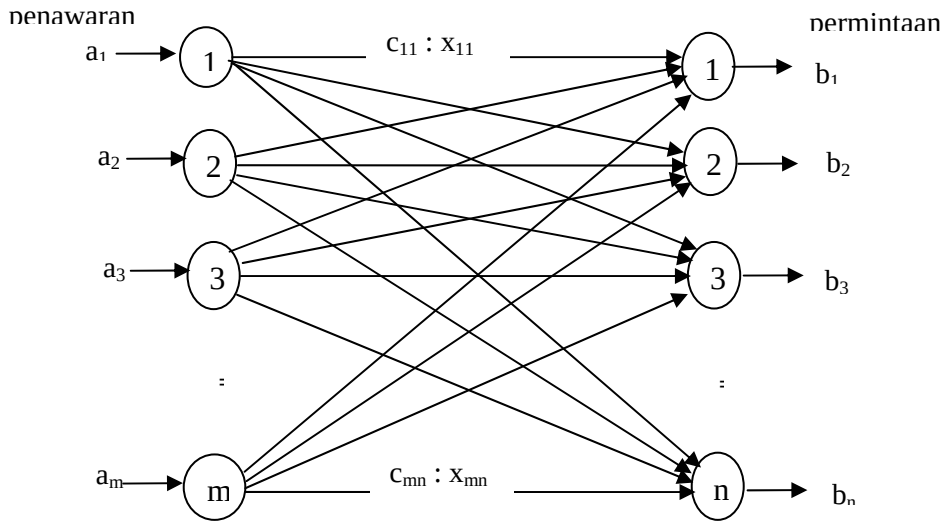
BAB VII. METODE TRANSPORTASI

Dilihat dari namanya, metode transportasi digunakan untuk mengoptimalkan biaya pengangkutan (transportasi) *komoditas tunggal* dari *berbagai daerah sumber* menuju *berbagai daerah tujuan*. Tiga hal penting harus diingat dari penjelasan di atas, yaitu komoditas tunggal, daerah sumber (asal) lebih dari satu dan daerah tujuan juga lebih dari satu.

Meskipun demikian, metode transportasi tidak hanya berguna untuk optimasi pengangkutan komoditas (barang) dari daerah sumber menuju daerah tujuan. Metode transportasi juga dapat digunakan untuk perencanaan produksi. Data yang dibutuhkan dalam metode transportasi adalah:

1. Level suplai pada setiap daerah sumber dan level permintaan pada setiap daerah tujuan untuk kasus pendistribusian barang; jumlah produksi dan jumlah permintaan (kapasitas inventori) pada kasus perencanaan produksi.
2. Biaya transportasi per unit komoditas dari setiap daerah sumber menuju berbagai daerah tujuan pada kasus pendistribusian; biaya produksi dan inventori per unit pada kasus perencanaan produksi.

Karena hanya ada satu jenis komoditas, pada dasarnya setiap daerah tujuan dapat menerima komoditas dari sembarang daerah sumber, kecuali ada kendala lainnya. Kendala yang mungkin terjadi adalah tidak adanya jaringan transportasi dari suatu sumber menuju sutau tujuan; waktu pengangkutan yang lebih lama dibandingkan masa berlaku komoditas. Kita dapat menggambarkan jaringan pengangkutan pada metode transportasi seperti yang ditunjukkan Gambar 7.1.



Gambar 7.1.

- a_i (i=1, 2, 3, …, m) menunjukkan suplai pada sumber ke-i.
- b_j (j=1, 2, 3, …, n) menunjukkan permintaan pada tujuan ke-j.
- c_{ij} menunjukkan biaya transportasi per unit dari sumber ke-i menuju tujuan-j.
- x_{ij} menunjukkan jumlah yang diangkut/dialokasikan dari sumber i menuju tujuan j.

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, metode transportasi tidak hanya digunakan dalam pendistribusian barang (komoditas). Metode transportasi juga dapat digunakan untuk mengoptimalkan sistem produksi. Persamaan elemen antara sistem transportasi dengan sistem produksi ditunjukkan tabel di bawah ini.

Sistem Transportasi	Sistem Produksi
1. Smber i	1. Periode produksi i
2. Tujuan j	2. Periode permintaan j
3. Suplai pada sumber i	3. Kapasitas produksi periode i

4. Permintaan pada tujuan j	4. Permintaan periode j
5. Biaya transportasi per unit dari sumber i ke tujuan j	5. Biaya produksi dan inventori per unit dari periode i ke j

FORMULASI MATEMATIK

Karena tujuan optimasi adalah penentuan total biaya minimum, maka tujuan dalam model matematiknya adalah minimisasi. Alternatif keputusan dalam hal ini adalah penentuan jumlah yang akan diangkut dari daerah sumber i menuju tujuan j. Koefisien fungsi tujuan oleh karenanya adalah biaya angkut per unit dari sumber i menuju tujuan j. Kendala atau sumber daya yang membatasi penentuan total biaya transportasi optimum adalah jumlah suplai pada masing-masing daerah sumber dan jumlah permintaan pada masing-masing daerah tujuan.

Menggunakan x_{ij} sebagai jumlah yang diangkut dari sumber i menuju tujuan j, c_{ij} sebagai biaya transportasi per unit komoditas dari sumber i menuju tujuan j, a_i sebagai jumlah suplai pada sumber i dan b_j sebagai permintaan pada tujuan j, maka bentuk PL kasus transportasi adalah:

$$\text{Min } z = \sum\sum c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Terhadap } \sum x_{ij} \leq a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum x_{ij} \geq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Jika total suplai ($\sum a_i$) sama dengan total permintaan ($\sum b_j$), maka formulasi yang dihasilkan disebut sebagai model transportasi seimbang. Perbedaannya dengan formulasi di atas hanya pada penggunaan persamaan pada kendala, yaitu:

$$\sum x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$\sum x_{ij} = b_j$, j = 1, 2, ..., n

Algoritma penyelesaian metode transportasi yang akan dibahas di bawah digunakan untuk model transportasi seimbang.

PENENTUAN SOLUSI AWAL

Sama dengan algortima penyelesaian simpleks yang sudah dibahas sebelumnya, penyelesaian menggunakan metode transportasi juga dimulai dengan penentuan solusi awal. Penentuan solusi awal dapat dilakukan dengan memilih salah satu dari metode sudut barat laut, biaya terkecil atau Vogel's Approximation Method (VAM). Solusi awal layak dilihat dari jumlah sel yang teralokasi. Solusi layak jika jumlah sel yang terisi sebanyak m + n -1 (m menunjukkan jumlah sumber dan n adalah jumlah tujuan).

PT. XYZ mempunyai 3 pabrik yang berlokasi di 3 kota berbeda dan memproduksi minuman ringan yang dibotolkan. Produk dari ketiga pabrik didistribusikan ke 5 gudang yang terletak di lima kota daerah distribusi. Biaya pengangkutan per krat minuman (ratus rupiah), jumlah suplai pada masing-masing pabrik (dalam ribu krat) dan daya tampung pada masing-masing gudang (dalam ribu krat) setiap hari ditunjukkan tabel di bawah ini:

Tabel 7.1. Biaya distribusi per unit dan kapasitas sumber dan tujuan.

P		G U D A N G					
A		1	2	3	4	5	suplai
B	A	2	5	6	3	5	500
R	B	6	10	3	3	7	300
I	C	11	5	6	6	4	600
K	kapasitas	300	400	200	300	200	

Tabel 7.2. Tabel Transportasi

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	2	5	6	3	5	500
B	B	6	10	3	3	7	300
E	C	11	5	6	6	4	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Metode Sudut Barat Laut (North West Corner)

Solusi awal menggunakan metode sudut barat laut ditentukan dengan mengisi sel kosong yang masih dapat diisi dan terletak paling kiri atas (sudut barat laut). Jumlah yang dialokasikan pada sel kosong tersebut (x_{ij}) tidak boleh melebihi jumlah suplai pada sumber i dan jumlah permintaan pada tujuan j.

Iterasi-1

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 2	5	6	3	5	500
B	B	X 6	10	3	3	7	300
E	C	X 11	5	6	6	4	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-2

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 2	200 5	X 6	X 3	X 5	500
B	B	X 6	10	3	3	7	300
E	C	X 11	5	6	6	4	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-3

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	200 [5]	x [6]	x [3]	x [5]	500
B	B	x [6]	200 [10]	[3]	[3]	[7]	300
E	C	x [11]	x [5]	[6]	[6]	[4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-4

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	200 [5]	x [6]	x [3]	x [5]	500
B	B	x [6]	200 [10]	100 [3]	x [3]	x [7]	300
E	C	x [11]	x [5]	[6]	[6]	[4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-5

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	200 [5]	x [6]	x [3]	x [5]	500
B	B	x [6]	200 [10]	100 [3]	x [3]	x [7]	300
E	C	x [11]	x [5]	100 [6]	300 [6]	200 [4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Solusi awal dengan metode sudut barat laut oleh karenanya adalah:

P		G U D A N G					
A		1	2	3	4	5	suplai
B	A	300 [2]	200 [5]	[6]	[3]	[5]	500
	B	[6]	200 [10]	100 [3]	[3]	[7]	300

R	C	11	5	100 6	300 6	200 4	600
I K	kapasitas	300	400	200	300	200	

Layak tidaknya solusi awal dipenuhi jika jumlah sel basis (sel yang terisi sama) dengan 3+5-1=7. Jumlah sel basis pada solusi awal dengan metode sudut barat laut di atas adalah 7, dengan demikian solusi awal yang diperoleh sudah layak. Alokasi barang dilihat dari solusi awal dengan metode sudut barat laut di atas adalah:

- Jumlah yang diangkut dari pabrik A menuju gudang 1 adalah 300 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik A menuju gudang 2 adalah 200 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik B menuju gudang 2 adalah 200 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik B menuju gudang 3 adalah 100 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 3 adalah 100 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 4 adalah 300 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 5 adalah 200 000 krat per hari.
- Total biaya pengangkutan minuman ringan per hari adalah (600 + 1000 + 2000 + 300 + 600 + 1800 + 800) x 100 000 = 710.000.000,00 rupiah.

Metode Biaya Terkecil

Solusi awal menggunakan metode biaya terkecil ditentukan dengan mengisi sel kosong yang masih dapat diisi dengan biaya paling kecil. Jumlah yang dialokasikan pada sel kosong tersebut (x_{ij}) tidak boleh melebihi jumlah suplai pada sumber i dan jumlah permintaan pada tujuan j.

Iterasi-1

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	[5]	[6]	[3]	[5]	500
B	B	X [6]	[10]	[3]	[3]	[7]	300
E	C	X [11]	[5]	[6]	[6]	[4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-2

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	[5]	X [6]	[3]	[5]	500
B	B	X [6]	[10]	200 [3]	[3]	[7]	300
E	C	X [11]	[5]	X [6]	[6]	[4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-3

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	X [5]	X [6]	200 [3]	X [5]	500
B	B	X [6]	[10]	200 [3]	[3]	[7]	300
E	C	X [11]	[5]	X [6]	[6]	[4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-4

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	x [5]	x [6]	200 [3]	x [5]	500
B	B	x [6]	x [10]	200 [3]	100 [3]	x [7]	300
E	C	x [11]	[5]	x [6]	[6]	[4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-5

S		T U J U A N					
U		1	2	3	4	5	suplai
M	A	300 [2]	x [5]	x [6]	200 [3]	x [5]	500
B	B	x [6]	x [10]	200 [3]	100 [3]	x [7]	300
E	C	x [11]	400 [5]	x [6]	0 [6]	200 [4]	600
R	kapasitas	300	400	200	300	200	

Solusi awal dengan metode biaya terkecil oleh karenanya adalah:

P		G U D A N G					
A		1	2	3	4	5	suplai
B	A	300 [2]	[5]	[6]	200 [3]	[5]	500
R	B	[6]	[10]	200 [3]	100 [3]	[7]	300
I	C	[11]	400 [5]	[6]	0 [6]	200 [4]	600
K	kapasitas	300	400	200	300	200	

Jumlah sel basis pada solusi awal di atas sama dengan 7, dengan demikian solusi awal yang diperoleh sudah layak. Alokasi barang dilihat dari solusi awal dengan metode biaya terkecil di atas adalah:

- Jumlah yang diangkut dari pabrik A menuju gudang 1 adalah 300.000 krat per hari.

- Jumlah yang diangkut dari pabrik A menuju gudang 4 adalah 200.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik B menuju gudang 3 adalah 200.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik B menuju gudang 4 adalah 100 000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 2 adalah 400.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 5 adalah 200.000 krat per hari.
- Total biaya pengangkutan minuman ringan per hari adalah (600 + 600 + 600 + 300 + 2000 + 800) x 100 000 = 490.000.000,00 rupiah.

Solusi awal ini lebih baik dibandingkan dengan solusi awal menggunakan metode sudut barat laut.

Metode Pendekatan Vogel (Vogel's Approximation Method)

Solusi awal menggunakan metode pendekatan Vogel ditentukan dengan mengikuti langkah berikut:

1. Tentukan selisih biaya terkecil dengan biaya di atasnya pada setiap baris dan kolom.
2. Cari selisih terbesar, dan alokasikan pada sel dengan biaya terkecil tersebut sesuai dengan jumlah suplai sumber dan jumlah permintaan tujuan yang bersesuaian.
3. Ulangi langkah 1 dan 2 sampai solusi awal layak sudha diperoleh.

Iterasi-1

S		T U J U A N						
U		1	2	3	4	5	suplai	selisih
M	A	300 [2]	[5]	[6]	[3]	[5]	500	1
B	B	x [6]	[10]	[3]	[3]	[7]	300	0
E	C	x [11]	[5]	[6]	[6]	[4]	600	1
R	kapasitas	300	400	200	300	200		
selisih		4	0	3	0	1		

Iterasi-2

S		T U J U A N						
U		1	2	3	4	5	suplai	selisih
M	A	300 [2]	[5]	x [6]	[3]	[5]	500	1,2
B	B	x [6]	[10]	200 [3]	[3]	[7]	300	0,4
E	C	x [11]	[5]	x [6]	[6]	[4]	600	1
R	kapasitas	300	400	200	300	200		
selisih		4	0	3	0	1		

Iterasi-3

S		T U J U A N						
U		1	2	3	4	5	suplai	selisih
M	A	300 [2]	[5]	x [6]	[3]	[5]	500	1,2
B	B	x [6]	x [10]	200 [3]	100 [3]	x [7]	300	0,4
E	C	x [11]	[5]	x [6]	[6]	[4]	600	1
R	kapasitas	300	400	200	300	200		
selisih		4	0	3	0,3	1		

Iterasi-4

S		T U J U A N						
U		1	2	3	4	5	suplai	selisih
M	A	300 [2]	[5]	x [6]	200 [3]	[5]	500	1,2
B	B	x [6]	x [10]	200 [3]	100 [3]	x [7]	300	0,4
E	C	x [11]	[5]	x [6]	x [6]	[4]	600	1
R	kapasitas	300	400	200	300	200		
selisih		4	0	3	0,3	1		

Iterasi-5

S		T U J U A N						
U		1	2	3	4	5	suplai	selisih
M	A	300 [2]	x [5]	x [6]	200 [3]	0 [5]	500	1,2
B	B	x [6]	x [10]	200 [3]	100 [3]	x [7]	300	0,4
E	C	x [11]	[5]	x [6]	x [6]	[4]	600	1
R	kapasitas	300	400	200	300	200		
selisih		4	0	3	0,3	1		

Iterasi-6

S		T U J U A N						
U		1	2	3	4	5	suplai	selisih
M	A	300 [2]	x [5]	x [6]	200 [3]	0 [5]	500	1,2
B	B	x [6]	x [10]	200 [3]	100 [3]	x [7]	300	0,4
E	C	x [11]	400 [5]	x [6]	x [6]	200 [4]	600	1
R	kapasitas	300	400	200	300	200		
selisih		4	0	3	0,3	1		

Solusi awal dengan metode pendekatan Vogel oleh karenanya adalah:

P		G U D A N G					
A		1	2	3	4	5	suplai
B	A	300 [2]	[5]	[6]	200 [3]	0 [5]	500
R	B	[6]	[10]	200 [3]	100 [3]	[7]	300
I	C	[11]	400 [5]	[6]	[6]	200 [4]	600
K	kapasitas	300	400	200	300	200	

Jumlah sel basis yang diperoleh sama dengan 7, dengan demikian solusi awal yang diperoleh sudah layak. Alokasi barang dilihat dari solusi awal dengan metode pendekatan Vogel di atas adalah:

- Jumlah yang diangkut dari pabrik A menuju gudang 1 adalah 300.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik A menuju gudang 4 adalah 200.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik B menuju gudang 3 adalah 200.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik B menuju gudang 4 adalah 100.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 2 adalah 400.000 krat per hari.
- Jumlah yang diangkut dari pabrik C menuju gudang 5 adalah 200.000 krat per hari.
- Total biaya pengangkutan minuman ringan per hari adalah (600 + 600 + 600 + 300 + 2000 + 800) x 100 000 = 490 000 000 rupiah.

Total biaya yang diperoleh menggunakan metode pendekatan Vogel sama dengan metode biaya terkecil. Kedua metode ini lebih baik dalam menghasilkan solusi awal dibandingkan dengan metode sudut barat laut. Untuk kasus yang lebih kompleks, metode pendekatan Vogel lebih baik

dibandingkan dengan metode biaya terkecil. Metode pendekatan Vogel untuk kasus tertentu menghasilkan solusi optimal.

PENENTUAN SOLUSI OPTIMAL

Ada dua metode yang dapat kita gunakan untuk menentukan solusi optimal, yaitu metode stepping stone dan Modified Distribution (MoDi). Kedua metode digunakan untuk menentukan sel masuk. Prinsip perhitungan kedua metode dalam menentukan sel masuk adalah sama. Perbedaannya, metode MoDi didasarkan pada hubungan primal-dual metode simpleks, sedangkan metode stepping stone tidak menunjukkan hubungan sama sekali dengan metode simpleks. Metode yang akan digunakan dalam catatan ini adalah MoDi.

Metode Modifikasi Distribusi (Modified Distribution - MoDi)

		T U J U A N				
		1	2	…	n	suplai
S U M B E R	1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	…	x_{1n} $\boxed{c_{1n}}$	a_1
	2	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	…	x_{2n} $\boxed{c_{2n}}$	a_2
	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
	m	x_{m1} $\boxed{c_{m1}}$	x_{m2} $\boxed{c_{m2}}$	…	x_{m3} $\boxed{c_{mn}}$	a_m
	kapasitas	b_1	b_2	…	b_n	

Primal (biaya):

Minimumkan $z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots c_{m1}x_{m1} + c_{mn}x_{mn}$

Terhadap: $x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \longrightarrow u_1$

$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \longrightarrow u_2$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \longrightarrow u_m$

$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \longrightarrow v_1$

$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \longrightarrow v_2$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \longrightarrow v_n$

Dual

Maksimumkan $w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n$

Terhadap : $u_1 + v_1 \leq c_{11}$

$u_1 + v_2 \leq c_{12}$

$\vdots$

$u_2 + v_1 \leq c_{21}$

$u_2 + v_2 \leq c_{22}$

$\vdots$

$u_m + v_n \leq c_{mn}$

$u_1, u_2 \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$ tidak terbatas.

Solusi optimal tercapai jika untuk:

- Maksimisasi, $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$
- Minimisasi, $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$

Langkah-langkah Penyelesaian:

1. Penentuan sel masuk.
   - Untuk setiap sel basis, hitung $u_i + v_j = c_{ij}$. u_i menunjukkan baris ke-i, v_j menunjukkan kolom ke-j dan c_{ij} adalah biaya pada sel ij (baris i kolom j); karena jumlah variabel yang tidak diketahui (u_i dan v_j) lebih banyak dibandingkan jumlah

persamaan yang dibentuk, maka salah satu variabel diasumsikan bernilai 0.

- Untuk setiap sel non basis, hitung $c_{pq} = u_i + v_j - c_{ij}$.
- Untuk maksimisasi, sel masuk adalah sel dengan nilai c_{pq} paling negatif; sedangkan untuk minimisasi, sel masuk adalah sel dengan nilai c_{pq} paling positif.

2. Penentuan sel keluar. Penentuan sel keluar dilakukan menggunakan loop tertutup. Awal dan akhir loop adalah sel masuk. Garis-garis horizontal ataupun vertikal yang membentuk loop harus berakhir (ujung awal ataupun akhir garis) pada sel basis, kecuali awal dan akhir loop pada sel masuk.

3. Periksa apakah sudah optimal. Syarat optimal dipenuhi jika c_{pq} tidak ada yang bernilai negatif (≥ 0) untuk maksimisasi dan tidak ada yang bernilai positif (≤ 0) untuk minimisasi.

Kita gunakan solusi awal yang diperoleh menggunakan metode sudut barat laut sebelumnya. Solusi awalnya adalah sebagai berikut:

P		G U D A N G					
A		1	2	3	4	5	suplai
B	A	300 [2]	200 [5]	[6]	[3]	[5]	500
R	B	[6]	200 [10]	100 [3]	[3]	[7]	300
I	C	[11]	[5]	100 [6]	300 [6]	200 [4]	600
K	kapasitas	300	400	200	300	200	

Iterasi-1

Sel basis adalah sel 11, 12, 22, 23, 33, 34, 35, sel non basis adalah 13, 14, 15, 21, 24, 25, 31, 32.

1. Penentuan sel masuk

   1. Untuk setiap sel basis:

      $u_1 + v_1 = 2$ $\quad$ $u_1 + v_2 = 5$ $\quad$ $u_2 + v_2 = 10$

      $u_2 + v_3 = 3$ $\quad$ $u_3 + v_3 = 6$ $\quad$ $u_3 + v_4 = 6$

      $u_3 + v_5 = 4$

      Misalkan $u_1 = 0$, maka $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $u_2 = 5$; $v_3 = -2$; $u_3 = 8$; $v_4 = -2$; $v_5 = -4$

   2. Untuk setiap sel non basis:

      $c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 2 – 6 = -8$

      $c_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 -2 – 3 = -5$

      $c_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 – 4 – 5 = -9$

      $c_{21} = u_2 + v_1 – c_{21} = 5 +2 – \boxed{1}$

      $c_{24} = u_2 + v_4 – c_{24} = 5 - 2 - 3= 0$

      $c_{25} = u_2 + v_5 – c_{25} = 5 – 4 – 7 = -6$

      $c_{31} = u_3 + v_1 – c_{31} = 8 + 2 – 11 = -1$

      $c_{32} = u_3 + v_2 – c_{32} = 8 + 5- \boxed{8}$

   Karena masih ada dua sel non basis yang bernilai positif dan tujuan dari optimasi ini adalah minimisasi biaya, maka tabel belum optimal. Sel masuk adalah sel dengan nilai positif terbesar, dalam hal adalah sel 32, artinya dengan mengisi sel 32, biaya transportasi dapat berkurang.

2. Penentuan sel keluar

   Sel keluar ditentukan menggunakan loop tertutup. Loop harus berawal dan berakhir pada sel 32. Hanya ada satu alternatif loop

yang dapat kita bentuk. Loop terbentuk pada sel 32, 33, 23 dan 22. Karena sel 32 akan diisi, maka sel 33 dan 22 akan berkurang dan sel 32 dan 23 akan bertambah. Jumlah yang diperpindahkan sama dengan alokasi terkecil yang ada dalam sel loop.

PABRIK		GUDANG					
		1	2	3	4	5	suplai
	A	300 [2]	200 [5]	[6]	[3]	[5]	500
	B	[6]	200 [10]	100 [3]	[3]	[7]	300
	C	[11]	+ [5]	100 [6]	300 [6]	200 [4]	600
	kapasitas	300	400	200	300	200	

PABRIK		GUDANG					
		1	2	3	4	5	suplai
	A	300 [2]	200 [5]	[6]	[3]	[5]	500
	B	[6]	100 [10]	200 [3]	[3]	[7]	300
	C	[11]	100 [5]	[6]	300 [6]	200 [4]	600
	kapasitas	300	400	200	300	200	

Alokasi pada iterasi pertama adalah:

- Dari pabrik A ke gudang 1 sebesar 300 unit, biaya 60.000.000
- Dari pabrik A menuju gudang 2 sebesar 200 unit, biaya 100.000.000

- Dari pabrik B menuju gudang 2 sebesar 100 unit, biaya 100.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 3 sebesar 200 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 2 sebesar 100 unit, biaya 100.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 4 sebesar 300 unit, biaya 180.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 5 sebesar 200 unit, biaya 80.000.000,00
- Total biaya = Rp. 680.000.000,00

Iterasi-2:

1. Penentuan sel masuk

- Sel basis adalah sel 11, 12, 22, 23, 32, 34 dan 35.

  $u_1 + v_1 = 2$ $\quad$ $u_1 + v_2 = 5$ $\quad$ $u_2 + v_2 = 10$

  $u_2 + v_3 = 3$ $\quad$ $u_3 + v_2 = 5$ $\quad$ $u_3 + v_4 = 6$

  $u_3 + v_5 = 4$

  Misalkan $u_1 = 0$, maka $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $u_2 = 5$; $v_3 = -2$; $u_3 = 0$; $v_4 = 6$; $v_5 = 4$

- Sel non basis adalah sel 13, 14, 15, 21, 24, 25, 31 dan 33.

  $u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 2 - 6 = -8$ $\quad$ $u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 3 = \boxed{3}$

  $u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 4 - 5 = -1$ $\quad$ $u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 2 - 6 = \boxed{1}$

  $u_2 + v_4 - c_{24} = 5 + 6 - 3 = \boxed{8}$ $\quad$ $u_2 + v_5 - c_{25} = 5 + 4 - 7 = \boxed{2}$

  $u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 2 - 11 = -9$ $\quad$ $u_3 + v_3 - c_{33} = 0 - 2 - 6 = -8$

2. Penentuan sel keluar

P A B R I K		G U D A N G					
		1	2	3	4	5	suplai
	A	300 [2]	200 [5]	[6]	[3]	[5]	500
	B	[6]	100 [10]	200 [3]	[3]	[7]	300
	C	[11]	100 [5]	[6]	300 [6]	200 [4]	600
	kapasitas	300	400	200	300	200	

P A B R I K		G U D A N G					
		1	2	3	4	5	suplai
	A	300 [2]	200 [5]	[6]	[3]	[5]	500
	B	[6]	[10]	200 [3]	100 [3]	[7]	300
	C	[11]	200 [5]	[6]	200 [6]	200 [4]	600
	kapasitas	300	400	200	300	200	

- Dari pabrik A menuju gudang 1 sebesar 300 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik A menuju gudang 2 sebesar 200 unit, biaya 100.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 3 sebesar 200 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 4 sebesar 100 unit, biaya 30.000.000,00

- Dari pabrik C menuju gudang 2 sebesar 200 unit, biaya 100.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 4 sebesar 200 unit, biaya 120.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 5 sebesar 200 unit, biaya 80.000.000,00
- Total biaya = Rp. 550.000.000,00

Iterasi-3:

1. Penentuan sel masuk

- Sel basis adalah sel 11, 12, 23, 24, 32, 34 dan 35.

  $u_1 + v_1 = 2$ $\quad$ $u_1 + v_2 = 5$ $\quad$ $u_2 + v_3 = 3$

  $u_2 + v_4 = 3$ $\quad$ $u_3 + v_2 = 5$ $\quad$ $u_3 + v_4 = 6$

  $u_3 + v_5 = 4$

  Misalkan $u_1 = 0$, maka $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $u_2 = -3$; $v_3 = 6$; $u_3 = 0$; $v_4 = 6$; $v_5 = 4$

- Sel non basis adalah sel 13, 14, 15, 21, 22, 25, 31 dan 33.

  $u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 6 - 6 = -12$ $\quad$ $u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 3 = \boxed{3}$

  $u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 4 - 5 = -1$ $\quad$ $u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 2 - 6 = -7$

  $u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 5 - 10 = -8$ $\quad$ $u_2 + v_5 - c_{25} = -3 + 4 - 7 = -6$

  $u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 2 - 11 = -9$ $\quad$ $u_3 + v_3 - c_{33} = 0 - 6 - 6 = -12$

2. Penentuan sel keluar

P		G U D A N G					
A		1	2	3	4	5	suplai
B	A	300 2	200 5	6	3	5	500
R	B	6	10	200 3	100 3	7	300
I	C	11	200 5	6	200 6	200 4	600
K	kapasitas	300	400	200	300	200	

P A B R I K		G U D A N G					
		1	2	3	4	5	suplai
	A	300 [2]	0 [5]	[6]	200 [3]	[5]	500
	B	[6]	[10]	200 [3]	100 [3]	[7]	300
	C	[11]	400 [5]	[6]	[6]	200 [4]	600
	kapasitas	300	400	200	300	200	

- Dari pabrik A menuju gudang 1 sebesar 300 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik A menuju gudang 4 sebesar 200 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 3 sebesar 200 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 4 sebesar 100 unit, biaya 30.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 2 sebesar 400 unit, biaya 200.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 5 sebesar 200 unit, biaya 80.000.000,00
- Total biaya = Rp. 490.000.000,00

Iterasi-4:

3. Penentuan sel masuk
   - Sel basis adalah sel 11, 12, 14, 23, 24, 32 dan 35.

     $u_1 + v_1 = 2$ $\quad$ $u_1 + v_2 = 5$ $\quad$ $u_1 + v_4 = 3$

     $u_2 + v_3 = 3$ $\quad$ $u_2 + v_4 = 3$ $\quad$ $u_3 + v_2 = 5$

     $u_3 + v_5 = 4$

Misalkan $u_1 = 0$, maka $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $u_2 = 0$; $v_3 = 3$; $u_3 = 0$; $v_4 = 3$; $v_5 = 4$

- Sel non basis adalah sel 13, 15, 21, 22, 25, 31, 33 dan 34.

  $u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 3 - 6 = -3$ $\quad$ $u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 4 - 5 = -1$

  $u_2 + v_1 - c_{21} = 0 + 2 - 6 = -4$ $\quad$ $u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 5 - 10 = -5$

  $u_2 + v_5 - c_{25} = 0 + 4 - 7 = -3$ $\quad$ $u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 2 - 11 = -9$

  $u_3 + v_3 - c_{33} = 0 + 3 - 6 = -3$ $\quad$ $u_3 + v_4 - c_{34} = 0 + 4 - 6 = -2$

Karena semua nilai sudah negatif, maka tabel sudah optimal. Solusi optimalnya dengan demikian sama dengan solusi yang dihasilkan pada iterasi-3, yaitu:

- Dari pabrik A menuju gudang 1 sebesar 300 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik A menuju gudang 4 sebesar 200 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 3 sebesar 200 unit, biaya 60.000.000,00
- Dari pabrik B menuju gudang 4 sebesar 100 unit, biaya 30.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 2 sebesar 400 unit, biaya 200.000.000,00
- Dari pabrik C menuju gudang 5 sebesar 200 unit, biaya 80.000.000,00
- Total biaya = Rp. 490.000.000,00

Kalau anda perhatikan kembali solusi awal yang dihasilkan menggunakan metode biaya terkecil dan pendekatan Vogel, solusi optimal ini sama dengan solusi awal yang dihasilkan dengan kedua metode tersebut. Inilah kelebihan dari kedua metode tersebut, bahkan metode pendekatan Vogel

dapat menghasilkan solusi awal yang jauh lebih baik dibandingkan dengan metode biaya terkecil untuk kasus yang lebih kompleks.

METODE M BESAR DAN DUMMY

Kadang kala, alokasi dari satu daerah sumber menuju satu daerah tujuan tidak dimungkinkan karena berbagai alasan, diantaranya tidak adanya jalur transportasi, biaya yang sangat mahal, waktu lama melebihi umur ekonomis komoditas, dan lain-lain. Kasus seperti ini diatasi dengan memberikan biaya yang sangat besar (M besar) pada sel yang bersesuaian jika tujuan adalah minimisasi, atau keuntungan yang sangat-sangat kecil (-M besar) jika tujuan adalah maksimisasi. Teknik ini akan memaksa kita untuk tidak mengalokasikan pada sel yang bersangkutan.

Perhatikan kasus transportasi dari beberapa gudang distributor menuju agen besar pada daerah pemasaran di bawah ini. Manajemen memutusakan tidak akan mengirimkan barang dari gudang 2 ke daerah pemasaran 3 karena larangan pengiriman komoditas sejenis oleh pemerintah setempat dari luar daerah dimana gudang 2 berlokasi. Tabel di bawah ini menunjukkan biaya pengangkutan per unit komoditas.

		A G E N				
G		1	2	3	4	suplai
U	1	15	5	-	13	200
D	2	6	10	20	3	300
A	3	10	15	10	8	350
N	4	11	5	16	9	350
G	kapasitas	300	400	200	300	

Tabel transportasinya adalah:

		T U J U A N				
S U M B E R		1	2	3	4	suplai
	1	15	5	M	13	200
	2	6	10	20	3	300
	4	10	15	10	8	350
	3	11	5	16	9	350
	kapasitas	300	400	200	300	

Solusi awal dengan metode pendekatan Vogel adalah:

		T U J U A N					
S U M B E R		1	2	3	4	suplai	Selisih
	1	15	5 200	M	13	200	8
	2	6	10	20	3	300	3
	3	10	15	10	8	350	2
	4	11	5	16	9	350	4
	kapasitas	300	400	200	300		
	selisih	4	0	6	5		

		T U J U A N					
S U M		1	2	3	4	suplai	Selisih
	1	15	5 200	M	13	200	8

B E R	2	6	10	20	3	300	3
	3	10	15	200 10	8	350	2
	4	11	5	16	9	350	4
	kapasitas	300	400	200	300		
	selisih	4	0, 5	6	5		

S U M B E R		T U J U A N					
		1	2	3	4	suplai	Selisih
	1	15	200 5	M	13	200	8
	2	6	10	20	300 3	300	3,4
	3	10	15	200 10	8	350	2,5
	4	11	5	16	9	350	4,9
	kapasitas	300	400	200	300		
	selisih	4	0,5	6	5		

S U M B E R		T U J U A N					
		1	2	3	4	suplai	Selisih
	1	15	200 5	M	13	200	8
	2	6	10	20	300 3	300	3, 4
	3	10	15	200 10	8	350	2,5
	4	11	200 5	16	9	350	4, 9
	kapasitas	300	400	200	300		
	selisih	4	0,5	6	5		

S U M B E R		T U J U A N					
		1	2	3	4	suplai	Selisih
	1	15	5 200	M	13	200	8
	2	6 0	10	20	3 300	300	3, 4
	3	10	15	10 200	8	350	2, 5
	4	11	5 200	16	9	350	4, 9
	kapasitas	300	400	200	300		
selisih		4	0,5	6	5		

S U M B E R		T U J U A N					
		1	2	3	4	suplai	Selisih
	1	15	5 200	M	13	200	8
	2	6 0	10	20	3 300	300	3, 4
	3	10 150	15	10 200	8	350	2,5
	4	11 150	5 200	16	9	350	4, 9
	kapasitas	300	400	200	300		
selisih		4, 1	0,5	6	5		

Jumlah sel basis (sel yang terisi) seharusnya adalah m+n-1 = 4 + 4 - 1 = 7. Jumlah yang terisi pada solusi awal dengan metode pendekatan Vogel di atas sebanyak 7, dengan demikian solusi awal tersebut dinyatakan layak.

Penentuan solusi optimal dilakukan menggunakan metode MoDi.

1. sel masuk

- untuk setiap sel basis (sel 12, 21, 24, 31, 33, 41 dan 42), hitung

  $u_i + v_j = c_{ij}$

  $u_1 + v_2 = 5$; $u_2 + v_1 = 6$; $u_2 + v_4 = 3$; $u_3 + v_1 = 10$; $u_3 + v_3 = 10$; $u_4 + v_1 = 11$; $u_4 + v_2 = 5$;

  misalkan $v_2 = 0$, maka $u_1 = 5$; $u_2 = -5$; $u_3 = -1$; $u_4 = 5$; $v_1 = 11$; $v_3 = 11$; $v_4 = 8$;

- untuk setiap sel non basis (11, 13, 14, 22, 23, 32, 34, 43 dan 44), hitung

  $u_1 + v_1 - c_{11} = 5 + 11 - 15 = 1$; $u_1 + v_3 - c_{13} = 5+11-M = -M$;

  $u_1 + v_4 - c_{14} = 5 + 5 - 13 = -3$; $u_2 + v_2 - c_{22} = -5 + 0 - 10 = -15$;

  $u_2 + v_3 - c_{23} = -5 + 11 - 20 = -14$; $u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + 0 - 15 = -16$;

  $u_3 + v_4 - c_{34} = -1 + 8 - 8 = -1$; $u_4 + v_3 - c_{43} = 5 + 11 - 16 = 0$;

  $u_4 + v_4 - c_{44} = 5 + 8 - \boxed{4}$

2. Sel keluar

Pembentukan loop, diawali dan diakhir pada sel 44.

		TUJUAN				
SUMBER		1	2	3	4	suplai
	1	15	5 200	M	13	200
	2	6 0	10	20	3 300	300
	3	10 150	15	10 200	8	350
	4	11 150	5 200	16	9	350
	kapasitas	300	400	200	300	

Sejumlah 0 komoditas diperpindahkan karena sel 21 yang masuk dalam loop memuat paling sedikit yaitu 0.

		TUJUAN				
S		1	2	3	4	suplai

U M B E R	1	15	5 200	M	13	200
	2	6	10	20	3 300	300
	3	10 150	15	10 200	8	350
	4	11 150	5 200	16	9 0	350
	kapasitas	300	400	200	300	

1. Pemeriksaan optimalitas dan penentuan sel masuk.
   a. untuk setiap sel basis (sel 12, 24, 31, 33, 41, 42 dan 44), hitung $u_i + v_j = c_{ij}$

   $u_1 + v_2 = 5$; $u_2 + v_4 = 3$; $u_3 + v_1 = 10$; $u_3 + v_3 = 10$; $u_4 + v_1 = 11$;

   $u_4 + v_2 = 5$; $u_4 + v_4 = 9$;

   misalkan $u_1 = 0$, maka $u_2 = -6$; $u_3 = -1$; $u_4 = 0$; $v_1 = 11$; $v_2 = 5$; $v_3 = 11$; $v_4 = 9$;

   b. untuk setiap sel non basis (11, 13, 14, 21, 22, 23, 32, 34 dan 43), hitung

   $u_1 + v_1 – c_{11} = 0 + 11 – 15 = - 4$;

   $u_1 + v_3 – c_{13} = 0+11-M = -M$;

   $u_1 + v_4 – c_{14} = 0 + 9 – 13 = -4$;

   $u_2 + v_1 – c_{21} = -6 + 11 – 6 = -1$;

   $u_2 + v_2 – c_{22} = -6 + 5 – 10 = -11$;

   $u_2 + v_3 – c_{23} = -6 + 11 – 20 = -15$;

   $u_3 + v_2 – c_{32} = -1 + 5 – 15 = -11$;

   $u_3 + v_4 – c_{34} = -1 + 9 – 8 = 0$;

   $u_4 + v_3 – c_{43} = 0 + 11 – 16 = -5$;

Karena semua nilai sudah ≥ 0, maka tabel sudah optimal.

Cara penyelesaian di atas dapat dilakukan jika total suplai pada semua daerah sumber sama dengan total permintaan pada semua daerah

tujuan ($\sum a_i = \sum b_j$). Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka kita harus menggunakan dummy. Jika $\sum a_i > \sum b_j$, maka kita perlukan menambahkan dummy tujuan. Jika $\sum a_i < \sum b_j$, maka kita perlukan menambahkan dummy sumber. Dummy ini hanya bersifat sementara, hanya ada dalam perhitungan. Perhatikan kembali kasus pendistribusian produk dari beberapa gudang menuju daerah pemasaran di atas. Seandainya permintaan agen 3 di daerah pemasaran meningkat menjadi 300, maka total suplai akan lebih kecil dari total permintaan ($\sum a_i < \sum b_j$). Supaya kasus ini dapat diselesaikan, kita memerlukan dummy sumber. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, dummy hanya ada di kertas (membantu perhitungan), tidak akan dapat ditemukan dalam dunia nyata; oleh karena itu, biaya pada sel baris/kolom dummy adalah 0. Tabel transportasi akan menjadi seperti berikut:

		T U J U A N				
S U M B E R		1	2	3	4	suplai
	1	15	5	M	13	200
	2	6	10	20	3	300
	3	10	15	10	8	350
	4	11	5	16	9	350
	Dummy	0	0	0	0	100
	kapasitas	300	400	200	300	

Menggunakan metode pendekatan Vogel, akan diperoleh solusi awal di bawah. Jika anda periksa selanjutnya, solusi awal dengan metode pendekatan Vogel tersebut sudah optimal.

		T U J U A N	

S U M B E R		1	2	3	4	suplai
	1	15	5 200	M	13	200
	2	6	10	20	3 300	300
	3	10 150	15	10 200	8	350
	4	11 150	5 200	16	9 0	350
	Dummy	0	0	0 100	0	100
	kapasitas	300	400	300	300	